Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου

Διδάσκων: Μιχάλης Ξένος,
email : *mxenos@cc.uoi.gr*

2 Νοεμβρίου 2015

1. Έστω $p : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι κάθε λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y'(t) = p(t)y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, είναι της μορφής:

$$y(t) = C\mathrm{e}^{\int_\alpha^{\mathrm{t}} \mathrm{p(s)ds}},$$

με C σταθερά.

Υπόδειξη: Με παραγώγιση διαπιστώνει κανείς άμεσως ότι οι συναρτήσεις της δεδομένης μορφής αποτελούν πράγματι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Για το αντίστροφο υποθέστε ότι y είναι μια λύση της εξίσωσης, θεωρήστε τη συνάρτηση u:

$$u(t) = y(t)\mathrm{e}^{\int_\alpha^{\mathrm{t}} \mathrm{p(s)ds}}, \mathrm{t} \in [\alpha, \beta],$$

και βεβαιωθείτε ότι $u' = 0$, δηλ. η u είναι σταθερή συνάρτηση.

2. Έστω $p, q : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Να αποδείξετε ότι οι λύσεις της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y'(t) = p(t)y(t) + q(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ είναι της μορφής:

$$y(t) = \mathrm{e}^{\int_\alpha^t p(s)ds} \left[C_0 + \int_\alpha^t q(s)\mathrm{e}^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau} ds \right], \ t \in [\alpha, \beta],$$

όπου C_0 σταθερά.

Υπόδειξη: Για να βεβαιωθείτε ότι δεν υπάρχουν άλλες λύσεις, αρκεί να παρατηρήσετε ότι η διαφορά δύο λύσεων της μη ομογενούς εξίσωσης αποτελεί λύση της ομογενούς και να λάβετε υπ΄ όψιν την Άσκηση 1. Για να προσδιορίσετε λύσεις, δοκιμάστε λύσεις της μορφής:

$$y(t) = C(t)\mathrm{e}^{\int_\alpha^t p(s)ds},$$

όπως στην Άσκηση 1, αλλά τώρα με μια συνάρτηση $C(t)$ στη θέση της σταθεράς C (μέθοδος μεταβολής των σταθερών). Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $C(t)$ πληροί μια απλή διαφορική εξίσωση, η οποία είναι εύκολο να επιλυθεί.

3. Έστω η εξίσωση διαφορών $2y_{i+3} - y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = 0$, με αρχικές τιμές, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ και $y_2 = 2$. Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης σε κλειστή μορφή για όλες τις διδοχικές τιμές των i.

4. Έστω $t^* \in (0,1)$. Προσδιορίστε μια μη μηδενική σταθερά c τέτοια ώστε η συνάρτηση $y : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le t^*, \\ c(t-t^*)^2, & t^* < t \le 1, \end{cases}$$

να αποτελεί λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, \quad 0 \le t \le 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

5. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση: $f(x,y) = x^3(y^2 - x)$ πληροί τη συνθήκη *Lipschitz* ως προς τη μεταβλητή y στην περιοχή:

$$D = \{(x,y) : -2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}.$$

6. Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) - y_1(x)y_2(x) = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2'(x) = -y_2(x) + y_1(x)y_2(x) = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases}$$

Να δειχθεί με τη στάθμη l_1 ($\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$, για $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$), ότι η συνάρτηση $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ πληροί τη συνθήκη *Lipschitz* στην περιοχή:

$$D = \{(x, y_1, y_2) : 0 \le x \le \beta,\ 0 \le y_1 \le c,\ 0 \le y_2 \le d\}.$$

7. Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών (εξίσωση $VanDerPol$):

$$\begin{cases} y'' - \alpha(1-y^2)y' + y = 0, \\ y(x_0) = \beta_0, \\ y'(x_0) = \beta_1. \end{cases}$$

Μετατρέψτε το πρόβλημα αρχικών τιμών στο αντίστοιχο ΠΑΤ διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

8. Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - y(x)z(x) = f(x,y,z), \\ z'(x) = -z(x) + y(x)z(x) = g(x,y,z). \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\mathbf{f} = (f, g)$ πληροί τη συνθήκη *Lipschitz* στην περιοχή: $D = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1000,\ 0 \leq y \leq 25,\ 0 \leq z \leq 5\}$, χρησιμοποιώντας τη στάθμη l_1.

9. Έστω $f : [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση που πληροί τη συνθήκη *Lipschitz* ως προς την Ευκλειδια νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$. Έστω y και z οι λύσεις των προβλημάτων αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \quad t \in [\alpha,\beta], \\ y(\alpha) = y_0, \end{cases} \quad \kappa\alpha\iota \quad \begin{cases} z' = f(t,z), \quad t \in [\alpha,\beta], \\ z(\alpha) = z_0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε $t \in [\alpha,\beta]$, ισχύει:

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \mathrm{e}^{L(t-\alpha)} \|y_0 - z_0\|$$

Υπόδειξη: Συμβολίζουμε με $(\cdot\,,\cdot)$ το Ευκλέιδιο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$. Αν $x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^m$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = \frac{d}{dt}[(x_1(t))^2 + ... + (x_m(t))^2] = 2[x_1(t)x_1'(t) + ... + x_m(t)x_m'(t)] = 2(x'(t), x(t)).$$

10. Έστω $f : [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη *Lipschitz* ως προς τη δεύτερη μεταβλητή της,

$$\forall t \in [\alpha,\beta] \ \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m \ \ (f(t,y_1) - f(t,y_2),\ y_1 - y_2) \leq 0.$$

Έστω y και z οι λύσεις των προβλημάτων αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \quad t \in [\alpha,\beta], \\ y(\alpha) = y_0, \end{cases} \quad \kappa\alpha\iota \quad \begin{cases} z' = f(t,z), \quad t \in [\alpha,\beta], \\ z(\alpha) = z_0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε $t \in [\alpha,\beta]$, ισχύει:

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\|$$

Συμβολίζουμε με $(\cdot\,,\cdot)$ και $\|\cdot\|$ το Ευκλέιδιο εσωτερικό γινόμενο και την Ευκλείδια νόρμα, αντίστοιχα, στον $\mathbb{R}^m$.

Οι ασκήσεις μπορούν να επιστραφούν και μέσω email (mxenos@cc.uoi.gr) μέχρι την ημέρα εξέτασης του μαθήματος.

Βιβλιογραφία:

Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Γ.Δ. Ακρίβης, Β.Α. Δουγαλής, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2η έκδοση, 2013.

Αριθμητική Ανάλυση: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Μ.Ν. Βραχάτης, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2012.